

Proposition: On note $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. Soit $n \geq 1$.

On note $PGL_n(\mathbb{F}_q) = \frac{GL_n(\mathbb{F}_q)}{Z(GL_n(\mathbb{F}_q))} = \frac{GL_n(\mathbb{F}_q)}{\mathbb{F}_q^\times \cdot I_n}$ et $PSL_n(\mathbb{F}_q) = \frac{SL_n(\mathbb{F}_q)}{Z(SL_n(\mathbb{F}_q))} = \frac{SL_n(\mathbb{F}_q)}{\mu_n(\mathbb{F}_q) \cdot I_n}$.

On définit $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^n$. Alors:

$$\bullet |GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

$$\bullet |PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^\times|}$$

$$\bullet |SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^\times|}$$

$$\bullet |PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mu_n(\mathbb{F}_q)|} \text{ avec } |\mu_n(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{car}(\mathbb{F}_q) = 2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bullet |\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)| = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Pour $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$, on compte les bases de $\mathbb{F}_q^n$. Pour $|SL_n(\mathbb{F}_q)|$, on utilise $\frac{GL_n(\mathbb{F}_q)}{SL_n(\mathbb{F}_q)} \simeq \mathbb{F}_q^\times$.

Pour $|\mu_n(\mathbb{F}_q)|$, l'équation $x^2 - 1 = 0$ a 1 solution en caractéristique 2 (car $1 = -1$) et 2 sinon.

Pour $|\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)|$, une droite vectorielle de $\mathbb{F}_q^n$ est caractérisée par un vecteur directeur ($q^n - 1$) et une droite en possède $q - 1$.

Proposition: On a les isomorphismes suivants:

$$1) GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PGL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$$

$$2) PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4, PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$$

$$3) PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$$

$$\forall x, \exists \lambda_x \neq 0, g(x) = \lambda_x x \Rightarrow \exists \lambda \neq 0, \forall x, g(x) = \lambda x$$

On fait agir $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)$ par $g \cdot D = g(D)$. D'où un morphisme $GL_n(\mathbb{F}_q) \rightarrow S(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q))$.

Le noyau de ce morphisme est $\mathbb{F}_q^\times \cdot I_n$. D'où un morphisme injectif $\frac{GL_n(\mathbb{F}_q)}{\mathbb{F}_q^\times \cdot I_n} = PGL_n(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow S_{\frac{q^n - 1}{q - 1}}$.

D'où $PGL_n(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow S_{q+1}$.

$$1) \text{ On a } |\mu_2(\mathbb{F}_2)| = 1 \text{ d'où les égalités et } |PGL_2(\mathbb{F}_2)| = |S_3| = 6. \text{ D'où } PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3.$$

$$2) \text{ On a } |PGL_2(\mathbb{F}_3)| = |S_4| = 24, \text{ d'où } PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4. \text{ Et } |PSL_2(\mathbb{F}_3)| = \frac{24}{2} = 12$$

d'où $(PGL_2(\mathbb{F}_3) : PSL_2(\mathbb{F}_3)) = 2$. Puis A_4 est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_4 . D'où $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.

$$3) \text{ On a } |PGL_2(\mathbb{F}_4)| = 60 = \frac{1}{2} |S_5|. \text{ D'où } PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \text{Im}(PGL_2(\mathbb{F}_4)) = A_5.$$

$$\text{De plus, } |\mu_2(\mathbb{F}_4)| = 1 \text{ donc } PSL_2(\mathbb{F}_4) = PGL_2(\mathbb{F}_4).$$

q	$ PGL_2(\mathbb{F}_q) $	$ S_{q+1} $
2	6	6
3	24	24
4	60	120
5	120	720

Lemme: Soit $n \geq 5$. Soit un H un sous-groupe de S_n d'indice n .

Alors $H \simeq S_{n-1}$.

On fait agir S_n sur S_n/H par translation i.e. $\sigma \cdot (xH) = (\sigma x)H$. D'où un morphisme $\gamma: S_n \rightarrow S(S_n/H)$.

On a $\text{Ker } \gamma = \bigcap_{\sigma \in S_n} \sigma H \sigma^{-1} \subset H$ donc $|\text{Ker } \gamma| \leq (n-1)! = |H| < \frac{n!}{2}$. Or $\text{Ker } \gamma \triangleleft S_n$ donc $\text{Ker } \gamma = \{1\}$.

D'où γ injectif et bijectif car $|S_n/H| = n$.

On restreint l'action à H et on remarque que $\text{Im}(\gamma|_H) \subset S(S_n/H) \simeq S_{n-1}$.

D'où $\gamma|_H: H \hookrightarrow S_{n-1}$ est un isomorphisme car $|H| = (n-1)! = |S_{n-1}|$.

si $\text{Ker } \gamma = A_n$ de cardinal $\frac{n!}{2}$

$$\forall r \in H, r \cdot H = H$$

Proposition: On a les isomorphismes:

$$\begin{cases} \text{PG}_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5 \text{ et } \text{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5 \end{cases}$$

On a: $\text{PG}_2(\mathbb{F}_5) \hookrightarrow S_6$ et $|\text{PG}_2(\mathbb{F}_5)| = 120$. D'où $\varphi(\text{PG}_2(\mathbb{F}_5))$ est d'indice 6 dans S_6 . D'où $\varphi(\text{PG}_2(\mathbb{F}_5)) \cong S_5$. Par égalité des cardinaux, $\text{PG}_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$.

On a: $|\text{PSL}_2(\mathbb{F}_5)| = \frac{120}{2} = 60$ d'où $[\text{PG}_2(\mathbb{F}_5) : \text{PSL}_2(\mathbb{F}_5)] = 2$. Mais A_5 est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_5 , d'où $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$.